

DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL NÚMERO CERO, EN ALUMNOS DE ESCUELA ELEMENTAL

Learning difficulties of the number zero, in elementary school students

Rodríguez González, M. L.^a, Gómez Alfonso, B^b. y Filloy Yagüe, E^a.

^a Cinvestav – IPN, ^b Universitat de València

Resumen

Esta investigación tiene como objetivo identificar las dificultades que tienen los niños para construir los números naturales, al trabajar con un modelo de enseñanza diseñado con base en el modelo formal matemático de von Neumann. En este reporte, la atención se centra en las dificultades que tienen los niños para la construcción del número cero, partiendo de que en matemática educativa las dificultades de aprender matemáticas están en las matemáticas mismas. Los Modelos Teórico Locales y sus cuatro componentes son el marco teórico y metodológico, partiendo de la observación de la experiencia empírica: Modelo Formal (von Neumann); Modelo de Cognición: procesos para pasar de la acción a la operación a través de la asimilación; Modelo de Comunicación: procesos de producción de sentido y construcción de significado de las actividades que se les proponen; Modelo de Enseñanza: secuencias de actividades diseñadas con base en el modelo formal.

Palabras clave: Dificultades, construcción del número cero, Modelo Formal, Modelo de Enseñanza.

Abstract

This research aims to identify the difficulties that children have in constructing natural numbers, by working with a teaching model designed based on von Neumann's mathematical formal model. In this report, the focus is on the difficulties that children have in the construction of the number zero, based on the fact that in educational mathematics the difficulties of learning mathematics are in mathematics itself. Theoretical Local Models and its four components are the theoretical framework and the methodology, starting from the observation of the empirical experience: Formal Model (von Neumann); Cognition model: processes to move from action to operation through assimilation; Communication Model: processes of meaning production and construction of meaning of the proposed activities; Teaching Model: sequences of activities designed based on the formal model.

Keywords: Difficulties, Zero number construction, Teaching Model.

INTRODUCCIÓN

La investigación en matemática educativa sigue preocupada por las dificultades que tienen los niños para aprender los números en un proceso que les llevarán a comprender y construir las estructuras aritméticas y que servirán de base para desarrollar un pensamiento matemático. Se considera que en gran parte, estas dificultades son debidas a factores contextuales (familiar, social, cultural y escolar) que de manera directa o indirecta promueven el aprendizaje de los números con actividades relacionadas con el conteo oral y escrito, con ciertas carencias conceptuales.

En la Educación Primaria de México, (SEP, 2011), el tratamiento de los números se enfoca en el predominio del uso de la cardinalidad, y sólo hay un contenido temático referente al sentido y uso de la ordinalidad, mismo que se traduce en dos lecciones del libro de texto oficial denominado

“Desafíos Matemáticos” de primer grado (SEP, 2015), lo que hace que los niños aprendan los números con desfases o deficiencias conceptuales relacionadas con la ordinalidad y el cero. Esto, va acompañado de prácticas de enseñanza centradas en la memorización, mecanización y ejercitación de secuencias numéricas orales y escritas, así como el uso de operaciones aritméticas a través de los algoritmos elementales, descuidándose, las actividades orientadas a la construcción conceptual de los números, falta de tratamiento del cero como número, que se usa sin explicación en el inicio de secuencias numéricas o como cifra para representar números de más de un dígito.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La investigación que se ha venido realizando desde el 2016, con alumnos de primero a cuarto grado de educación primaria, en la Ciudad de México, está centrada en estudiar las dificultades que se observan en los niños al trabajar con un modelo de enseñanza con base en una estructura matemática formal para la construcción de los números naturales y que pueda servir de apoyo para la construcción del pensamiento aritmético.

La estructura aritmética que se propone se basa en el modelo de “von Neumann definition of ordinals” (en lo sucesivo “modelo formal de von Neumann”), el cual recupera los aportes de la teoría de conjuntos de Cantor y los axiomas de Peano. De manera natural se establece el orden a partir de la construcción del primer número (cero), e iterando la unidad para construir el sucesor.

La discusión Cantor – Peano sobre la construcción de los números naturales, no tiene sentido para esta investigación, porque en la construcción del número desde el punto de vista conjuntista de Cantor (1845 -1918) no hay orden, éste se construye a partir de las relaciones entre la cardinalidad de los conjuntos, provocando que el contar sea un proceso complejo, los números naturales se construyen separados unos de otros y no hay continuidad; mientras que en la construcción de los números en la perspectiva ordinal de Peano (1857 – 1932), se propone la axiomatización de los números a partir de la construcción del primer elemento que precisa la idea del sucesor; pero no hay conjuntos.

En cambio, en la línea señalada por J. von Neumann (1923 – 1957), estos números se construyen en un número finito de iteraciones a partir de la construcción del cero como número y como conjunto vacío, lo que además constituye un principio fundamental, es el único número que sumado o restado a cualquier número siempre lo deja igual. El orden se da de manera natural por la construcción, no se trata de una sucesión solamente,

Con estos referentes y con la finalidad de hacer Matemática Educativa en el global de esta investigación, se pretende analizar el problema de la enseñanza de los números naturales, incluido el cero, partiendo de que las dificultades de aprenderlos están en la matemática misma.

Pregunta y objetivos de la investigación

A tal fin, las preguntas generales que guían la investigación son:

- ¿Qué elementos deberán considerarse para el diseño de un modelo de enseñanza que permita trasladar el Modelo Formal de von Neumann a actividades concretas dirigidas a niños de 6 a 9 años?
- ¿Qué dificultades se pueden observar en la adquisición de las nociones de la estructura aritmética, cuando los niños trabajan la construcción de los números naturales a partir del modelo formal de von Neumann?
- Por lo que respecta a la presente comunicación, esta segunda pregunta se particulariza en:
- ¿Qué dificultades se pueden observar en la construcción del cero como número, a partir del modelo formal de von Neumann?

Para responder a las preguntas de investigación se han planteado los siguientes objetivos:

- Diseñar un modelo de Enseñanza que traslade el Modelo de la Matemática Formal a un Modelo Matemático Concreto; sin intervenir ni obstaculizar la estructura curricular, con la finalidad de conocer los procesos de generalización y comunicación con contenido matemático, a través del estudio de casos como estrategia metodológica.
- Identificar y comprender las dificultades que tienen los niños en los dos primeros ciclos de educación primaria, en la adquisición de las nociones de la estructura aritmética a partir de la construcción de los números naturales, con base en el modelo de von Neumann y a través del desarrollo de procesos de iteración y recursión; teniendo como referente teórico y metodológico los Modelos Teóricos Locales.

Este segundo objetivo se particulariza, a los efectos de esta comunicación en:

- Identificar y comprender las dificultades que tienen los niños en los dos primeros ciclos de educación primaria, para construir el número cero, con base en el modelo de von Neumann y a través del desarrollo de procesos de iteración y recursión; teniendo como referente teórico y metodológico los Modelos Teóricos Locales.

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

Con los aportes de los Modelos Teórico Locales (MTLs en adelante, Filloy, Rojano & Puig, 2008), se estructura el Marco Teórico a partir de sus cuatro componentes: Modelo de Competencia Formal.- estructura formal de J. von Neumann, para la construcción de los números naturales, incluyendo al cero como primer elemento de la construcción; Modelo Cognitivo.- procesos que se desarrollan para pasar de la acción a la operación, por medio de la asimilación, considerando la reversibilidad y transitividad que identificaron Piaget e Inhelder (1984) y las aportaciones de la teoría de la actividad, para realizar los procesos de significación (Galperín, 1976) y (Talizina 2001), los cuales se van a utilizar para la construcción del Modelo de Comunicación.- producción de sentido y significación en la comunicación, apoyándose en los aportes de la semiótica de Peirce (1987) y la herramienta de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) en Filloy, Rojano & Puig (2008); Modelo de Enseñanza.- Este diseño pretende trasladar el Modelo de von Neumann definition of ordinals a secuencias de actividades lúdicas, con el uso de material concreto para la construcción de los números naturales.

Los MTLs usan la observación empírica como principal herramienta para comprender los procesos cognitivos que se articulan en la competencia formal y pragmática. La observación se desarrolla en dos momentos: a) observación experimental para realizar un diagnóstico con la participación de 3 grupos de 1º, 2º y 3º de tres escuelas primarias públicas de la Ciudad de México; con la finalidad de elegir a los niños que participarán en el estudio de casos y la entrevista clínica; b) desarrollo de la Experimentación, diseñando las categorías de análisis, para finalmente rediseñar un Modelo de Enseñanza con base en el Modelo Formal.

Para este reporte, sólo se presenta el análisis de la sesión de construcción del número cero, con el grupo de primer grado.

La metodología es de corte cualitativo y toma en cuenta las dificultades que se producen en las aulas cuando se implementan diferentes tipos de actividades con la intención producir sentido de mensajes matemáticos y su decodificación. Es local porque se profundiza en el análisis de un fenómeno específico, el cual es analizado a la luz de las cuatro componentes: formal, cognitivo, enseñanza y de comunicación.

Modelo Formal: El número cero como punto de partida para la construcción en von Neumann

Para el diseño de este componente, se ha tomado como base la estructura matemática de von Neumann para la construcción de los números naturales, quien usa de la teoría de conjuntos (Cantor) y encapsula en la iteración los axiomas de Peano, con el Principio de inducción finita, donde todo número es construido a partir de un número finito de interacciones, empezando por el cero. La suma se da manera natural, es el sucesor ($n + 1$) y la resta es la operación contraria, es el antecesor ($n - 1$).

Otro de los atributos de este modelo es que presenta una lógica de construcción de los SMS involucrados en la construcción de los números naturales.

Desde la perspectiva didáctica, la enseñanza y el aprendizaje de los números en los primeros años de escolaridad de los niños, el número cero constituye una problemática pedagógica, pues curricularmente en el Plan y Programas de México (SEP, 2011), no tiene un espacio para ser tratado conceptualmente; pero desde el punto de vista de los autores de este artículo, es una necesidad trabajarla, para evitar conflictos con la construcción de los números naturales, comenzando con los significados de vacío, posicional y cifra. Esto puede ser pertinente para que los alumnos de manera eficiente puedan ir conceptualizando las nociones aritméticas e ir estableciendo el nexo con el álgebra. Se considera idóneo el modelo desarrollado por von Neumann porque empieza con el cero como conjunto vacío. En esta construcción, se van trabajando de manera natural las propiedades aritméticas en la construcción de los números naturales.

La construcción de von Neumann, ha sido desarrollada por Hamilton y Landin (1961) usando definiciones matemáticas y probando los teoremas para la construcción de los números naturales a partir del cero como el primer número y a partir de él se construyen los sucesores, usando la iteración y la recursión. El “orden” se da por la misma construcción. Con el proceso de iteración las acciones se repiten una y otra vez (Choate, Devaney y Foster, 1999 p. IX) y con la recursión se podrá realizar el mismo procedimiento que se hizo para el primer elemento, hacerlo para los subsecuentes, es decir, el $n+1$ se obtiene directamente del paso n .

Entonces se tiene que: “Cada ordinal es el conjunto de todos los ordinales que lo preceden” (van Heijenoort, 1967, p. 347) lo que se puede representar por las siguientes definiciones: “Cero es el vacío; i. e., $0 = \emptyset$ ”, se continua con: $1 = \{0\} = 0 \cup \{0\}$, de manera similar se construyen los números siguientes (Hamilton, 1961, p. 76):

$$0 = \emptyset$$

$$1 = \{0\}$$

$$2 = \{0, \{0\}\}$$

$$3 = \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}$$

Cada uno de estos conjuntos está bien ordenado por la relación de pertenencia $\in$. El siguiente es el sucesor y se define como:

El conjunto $x \cup \{x\}$ es el sucesor del conjunto x . Si y es un conjunto y si hay un conjunto x tal que y es el sucesor de x , entonces y es un sucesor. Para cada conjunto x , el sucesor de x es x'

Por lo tanto, $1 = 0'$, $2 = 1'$, $3 = 2'$, etc.

Diseño e implementación del Modelo de Enseñanza

El Modelo de Enseñanza es una colección de textos, en donde se genera un intercambio de textos, modelando situaciones con lenguajes que van de concretos a abstractos, para producir códigos de resolución (Filloy, 1999, p. 23). Para este fin se ha diseñado una secuencia de actividades concretas

con base en el modelo de von Neumann, de acuerdo con la estructura desarrollada en Hamilton y Landin (1961, Pp. 74 -123). Se usan bolsas de plástico transparente como contenedores de los conjuntos, las cuales tienen una tira adherida de un color específico a uno de los costados de la bolsa, (para el número cero es color amarillo). Se usa una calculadora simple, números de “fommy” (material usado en su elaboración) y otros objetos manipulables.

Con estas actividades se introduce a los niños en la construcción el número cero a partir de la noción de vacío, como el primer elemento de la secuencia numérica, usando para ello bolsas de hule transparente. Para dirigir las actividades la investigadora (profesora) usa la pregunta como un recurso didáctico para orientar a los niños a reflexionar y argumentar sobre las condiciones de la bolsa sin tener algún contenido dentro, con la finalidad de que la relacionen con la palabra “vacío”. Una vez que se ha logrado este acercamiento, se les pregunta si existe algún número para poder representarlo, así como sus usos en diferentes contextos. Se les propone presionar la tecla de color amarillo en la calculadora, en la que previamente las teclas de los números fueron tapadas con un color específico. Se les pregunta si lo conocen, dónde lo han visto y si lo han usado.

Una vez que nombran el número construido como cero, se les invita a colocarlo en una recta, en donde se inicia el principio del orden, pues a continuación se comienza a dar sentido a la iteración al preguntarles si se podrá construir “el que sigue” usando la recursión (definición de sucesor). Se les pregunta si este número tiene un antecesor, con la finalidad de que conceptualicen el número cero como el primer elemento de los números naturales. Otra de las fortalezas de este modelo de enseñanza, es usar la iteración de la unidad para la construcción de los sucesores, al mismo tiempo que se van ordenando en la recta. A continuación, se presenta la tabla 1, en donde se sintetiza el contenido, la articulación de las actividades diseñadas con el modelo formal y el material concreto que manipularan los niños.

Tabla 1. Articulación del Modelo Formal con el Modelo de Enseñanza

Contenido	Modelo Formal	Modelo de Enseñanza/Actividades	Material concreto
Construcción de los primeros números naturales	Definición del número cero como conjunto vacío y definición del número uno, con la iteración.	Construcción de los números con bolsitas.	Bolsas pequeñas de hule transparente (recipiente), números de plástico flexible.
	Definición y Construcción del sucesor	Construcción de los números, con bolsitas, cubitos, cuadros, puntos	Calculadora, recta representada con un hilo y/o cinta adhesiva de color.
	Definición de Número Natural y el cero.	Vamos a la inversa: del 9 al cero. Quién está antes y quién después.	
	Definiciones de orden, relaciones de $>$ $<$, el sentido de pertenencia $\in$ e intervalo de a hacia b . Construcción de la nueva unidad: decena	Comparación de los números en la Recta Numérica. Juego del “Cambio”	Fichas de colores y dados.

Categorías de análisis para interpretar la experiencia empírica

Para observar la experiencia empírica, con el fin de describir y explicar las actuaciones de los niños, en relación con las dificultades recurrentes que se presentaron durante el proceso con este modelo de enseñanza, se han diseñado las siguientes categorías, en las cuales se retoman los aportes del Modelo de Cognición para identificar los procesos cognitivos que se desarrollan con las actividades, retomando las Tendencias Cognitivas (TC) que proponen Filloy, Rojano, & Puig.

(2008, Pp. 163 – 166), las cuales se han sido reestructuradas de acuerdo con las dificultades recurrentes que se presentaron durante la realización de las actividades con los alumnos; del Modelo de Comunicación se retoman los aportes semióticos de Peirce (1987), para identificar y comprender el uso competente de los SMS involucrados en la construcción de los números naturales y los esbozos lógico/semióticos que estructuran los niños para resolver problemas aritméticos, así como la producción de sentido y procesos de significación a través de la generalización y abstracción reflexiva en su construcción Filloy (1979, 73-79), lo que permitió diseñar las categorías que posibilitaran comprender los Procesos de Significación a través de Argumentos (PSA) que usaron. De las relaciones significantes de Peirce (1987), se identificaron los usos semánticos, sintácticos y pragmáticos que hacen con los números (Filloy, 1999, p. 51), así como para la construcción de los Indicadores de las Relaciones Significantes (IRS).

1. Tendencias Cognitivas (TC)

1.1 Dotación de sentidos intermedios: utilización de códigos personales para dotar de sentido a acciones concretas intermedias, lo que puede constituir el tránsito de lo concreto a lo abstracto.

1.2 Obstructores provenientes de los conocimientos previos y de las maneras que han aprendido las nociones numéricas, que les generan dificultades semánticas y sintácticas en la construcción de los números naturales.

1.3 Obstructores provenientes de los procesos cognitivos, que les genera dificultades para establecer las relaciones de reversibilidad y transitividad.

2. Procesos de Significación a través de Argumentos (PSA)

2.1 Inducción.- Clasifica, prueba experimentalmente hipótesis, opera desde lo simbólico, usa la verificación para aproximarse a lo real.

2.2 Deducción.- Habilidad para razonar de lo general a lo particular.

2.3 Abducción.- Inferencia hipotética, implica un uso correcto de la lógica de los SMS, sus códigos y reglas. Usa la falsabilidad, para discriminar premisas verdaderas o falsas. La abducción es el razonamiento que permite transitar de una hipótesis a otra más abstracta.

3. Indicadores de las Relaciones Significantes (IRS)

3.1 Uso semántico de los números en las acciones de representación y conteo: secuencia, recuento, cardinal, ordinal, medida, etiqueta, guarismo, puntos de la recta numérica, (Puig 1994, p. 11); en acciones de etiquetar, contar, numerar y ordenar.

3.2 Uso pragmático de los números en situaciones problemáticas.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Principales dificultades observadas

Las actuaciones de los niños se organizaron con base en los indicadores de las relaciones significantes descritas anteriormente.

A. Uso semántico de los números en acciones de representación y conteo

A.1 Construcción del conjunto vacío como número cero

A.2 No identifica al número cero como representante del conjunto vacío.

A.3 No identifica al número cero como el principio de la secuencia numérica.

A.4 No identifica el número cero como el primer elemento de la recta numérica.

B. Uso pragmático en situaciones problemáticas

B.1 Representar el conjunto sucesor y antecesor del número cero.

B.2 Dificultad para usar relaciones de reversibilidad en uso de la iteración y recursión en la construcción de cada sucesor.

Ejemplos de un fragmento de la sesión del número cero

En este apartado se muestra un fragmento que se analizará en el párrafo siguiente con las categorías e indicadores descritos arriba.

- M: ¿Que tengo aquí? (la maestra muestra una bolsa de hule transparente)
- M: ¿Que tiene la bolsa? (la maestra la pone con la abertura hacia abajo)
- Ns: Nada
- N1: Una mano (la maestra introduce su mano a la bolsa para mostrar que está vacía)
- M: ¿De qué otra manera podemos decir lo que tiene la bolsa? (La maestra introduce algunos objetos a la bolsa y luego la vacía frente a ellos)
- M: ¿Cómo quedó la bolsa?
- Ns: Vacía
- M: ¿Cómo podemos saber que mi bolsa está vacía?
- Ns: Porque no tiene nada.
- NF: Porque si no metes algo, no tienes nada.
- NE: Si está vacío, no esta pesado.
- NA: Si le metes algo, ya está lleno.
- M: ¿Qué nombre le podemos poner a la bolsa vacía? (los niños no entienden la pregunta)
- NE: O por números
- M: ¿Cómo dijiste?
- Ns: Por números
- M: ¿Y cuál creen que sea el número que debe de estar aquí? (la maestra les pide que elijan uno de los números de “fommy”, que tiene pegados en el pizarrón)
- Ns: El uno, el dos, el tres,... (La maestra les da una calculadora, con las teclas tapadas con un color, porque las bolsas tienen una tira de un color específico para cada número)
- M: Presionen el color amarillo (en la calculadora porque es el color de identificación que tiene la bolsa)...¿Qué salió en la pantalla?
- Ns: Nada (relacionan el numeral cero con nada)
- M: ¿Nada? ¿quién es ese número?
- M: ¿Quién puede pasar al pizarrón a buscar el número que aparece en la pantalla y pegarlo en la bolsa? (una alumna pasa al pizarrón y toma el numeral cero de fommy y lo muestra a sus compañeros)
- M: ¿Se parece al que apareció en la calculadora?
- Ns: Si, no... (algunos niños contestan sin poner atención a la pregunta)
- M: ¿Cómo se llama éste? (se refiere al numeral que escogió la alumna)
- Ns: Cero
- M: Ese número es el mismo que sale en la calculadora, sólo que aquí tienen una forma un poco distinta de cómo los escribimos.

- M: Oigan y ¿Dónde ocupan el cero? (algunos niños mencionan distintos números donde aparece el cero, como el 10, 20, 30 y 200)
- M: Ahora fíjense lo que vamos a hacer. Lo vamos a acomodar, ¿En dónde lo coloco? ¿aquí, en medio o hasta el final? (la maestra señala la recta que está dibujada en el pizarrón)
- Ns: Hasta el final.
- M: ¿Hasta el final?
- Ns: ¡Ah!, en el primero!
- Ns: Y el uno en el segundo. (los niños se adelantan y dicen el número que sigue, pues ya conocen la secuencia numérica)
- M: ¿Podremos construir el que sigue?
- Ns: Sí.
- M: ¿Cómo saben cuál es el que sigue?
- N: Es el uno.
- M: Y ¿Cómo sabes que es el uno? (la maestra le pregunta al niño que dijo el número siguiente)
- N: Porque el uno debe de estar ahí y el cero debe de estar hasta el último.
- M: ¿Hasta el último?
- NF: En el primero
- M: Fabián ¿cuál crees que sea el que sigue?
- F: Cuando el uno este primero y el cero esté hasta el último. (Sigue insistiendo en la palabra último, para referirse al primero)
- M: ¿El cero está hasta el último?
- Ns: ¡El cero es el primero! (repiten en coro otros niños)

Análisis de la experiencia empírica

Construcción del conjunto vacío como número cero (A. 1), la mayoría de los niños relacionan la noción de nada con vacío; y algunos justifican su respuesta, argumentando sus hipótesis: NF, hace un razonamiento de negación de la acción de introducir elementos al conjunto (fabilismo PSA 2.3) pasando a otra hipótesis más abstracta; NE, reflexiona inductivamente (PSA 2.1) al compararlo con el peso y NE deduce (PSA 2.2) que lo contrario de vacío es lleno, usando la relación de reversibilidad (TC 1.2). Estas tendencias cognitivas les permitieron establecer relaciones significantes al hacer un uso pragmático de la situación problemática, estableciendo analogías, para describir una acción contraria a la acción de vacío (IRS 3.2). Al relacionar la acción de vaciar la bolsa con el vacío, los niños dotan de sentidos intermedios, de acuerdo con sus experiencias previas (TC 1.1) al decir que será un número el nombre de este conjunto vacío.

No identifican al número cero como el representante del conjunto vacío (A.2), al responder “uno, dos, tres” para nombrar a este conjunto primer conjunto (bolsa vacía), los niños no sólo usan los números como secuencia numérica empezando por el uno (TC 1.3); también constituye otra dificultad no identifican al número cero como el principio de la secuencia numérica (A.3). Lo mismo sucede cuando esperan que en la pantalla aparezca alguno de los numerales (1 – 9), pues relacionan el cero con el número ocho, por estar pixelado.

La percepción (B. 1) fue un obstáculo que se presentó en dos momentos (TC 1.3): cuando un alumno sólo da cuenta de la manipulación del objeto (acción de meter la mano a la bolsa para mostrar que está vacía), sin entender que la acción estaba enfocada en la ausencia de elementos.

La dotación de sentidos intermedios (TC 1.1) fue una tendencia cognitiva que se manifestó en casi todos los alumnos, cuando se les preguntó por los usos del número cero, haciendo referencia a su sentido conceptual como cifra; y haciendo uso de la deducción (PSA 2.2), al proponer ejemplos como 10, 20, 30 y 200, usándolo con un sentido distinto al vacío o nada.

Dificultad para usar relaciones de reversibilidad con el uso de la iteración y recursión en la construcción del número cero (B.2). Esta dificultad se observó en el momento de colocar al primer elemento en la recta, misma que está relacionada con el orden como principio de construcción de la secuencia numérica, constituyendo un obstructor, debido a la manera en que han aprendido los números tanto en el contexto familiar como el escolar, siempre comienzan con el número uno (TC 1.2), a pesar de que fue el cero primer número que se constuyó. Por ello es importante recuperar la definición de intervalo de von Neumann como el principio de construcción, que en este caso permitió a los niños establecer que el número cero, es el primer elemento de la construcción de los números naturales y se ubica al principio y no el final como decía NF. Lo que también representó para este alumno una dificultad en el uso semántico para su representación en la recta en el principio (A.4) como el primer elemento de la secuencia numérica.

Reflexiones para la investigación en Matemática Educativa

Con este análisis, se ha pretendido identificar las dificultades que tienen los niños, cuando se les presenta un modelo de enseñanza diseñado a partir del modelo formal von Neumann, para construir el número cero como la representación del conjunto vacío y el principio del sentido ordinal de los números naturales, tratando de identificar los SMS involucrados, guiados por el modelo de cognición y comunicación. Se pudo observar que las principales dificultades estuvieron relacionadas con las formas de uso pragmático de los números de acuerdo con las experiencias que han tenido en los diferentes ámbitos de su vida familiar, social y escolar.

El uso de las preguntas permitió a la docente guiar el proceso de enseñanza y a los niños dar sentido a las acciones que realizaron para construir relaciones significantes para conceptualizar el número cero.

Aunque la intención de esta investigación no es mejorar la enseñanza, se considera que aporta elementos para proponer un nuevo modelo de enseñanza con base en la estructura matemática de von Neumann.

Referencias

- Choate, J. Devaney, R. & Foster. (1999). Iteration. The Tool kit of Dynamic Activities. EEUU: Key Curriculum Press, Innovators in Mathematics Education.
- Filloy, E. (1999). Aspectos Teóricos del álgebra educativa. México: Grupo Editorial Iberoamérica
- Filloy, E. Rojano, T. & Puig, L. (2008). Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach. EEUU: Springer.
- Galperín, P. Y. (1976). Introducción a la Psicología: un enfoque dialéctico. España: Pablo del Río Editor.
- Hamilton, N. y Landin, N. (1961). Set Theory and The Structure of Arithmetic. Boston, Usa: Allyn and Bacon, Inc.
- Heijenoort, van, J. (1967). From Frege to Gödel. A source Book in Mathematical Logic. Harvard: University Press.
- Piaget, J. y Inhelder, B. (1984). Psicología del niño. España: Morata.
- Peirce, Ch. (1987). Obra Lógico Semiótica. Madrid: Taurus Ediciones.
- Puig, L. (1994). Semiótica y Matemáticas. En Eutopías series/working papers. Vol. 51. Valencia, España.
- S.E.P. (2011). Plan de Estudios. México: Secretaría de Educación Pública.

- S.E.P. (2015). Desafíos Matemáticos. Libro para el alumno, primer grado. México: Secretaría de Educación Pública.
- Talizina, N. Comp. (2001). La formación de las Habilidades del Pensamiento Matemático. México: Universidad Autónoma de San Luis Potosí.