

ESTUDIO CUALITATIVO DE LOS RAZONAMIENTOS DE LOS ESTUDIANTES DE PRIMARIA Y SECUNDARIA SOBRE LA MAGNITUD DE LAS FRACCIONESⁱ

Qualitative study of primary and secondary school students' reasoning about fraction magnitude

González-Forte, J. M.^a, Fernández, C.^a, Van Hoof, J.^b y Van Dooren, W.^b

^aUniversidad de Alicante, ^bKatholieke Universiteit Leuven

Resumen

Estudios cuantitativos previos han mostrado que los estudiantes de educación primaria y secundaria tienen dificultades con la magnitud de las fracciones. Estas dificultades han sido atribuidas al uso inapropiado del conocimiento sobre los naturales o al uso de otros razonamientos incorrectos como el pensamiento en diferencias. Sin embargo, la presencia de estudios cualitativos que apoyen estas interpretaciones es escasa. En este estudio entrevistamos a 52 estudiantes de 1º de ESO, pertenecientes a diversos perfiles obtenidos en un estudio cuantitativo previo, con el objetivo de indagar acerca de sus razonamientos y de la confianza que tienen en ellos. Los resultados muestran consistencia entre la respuesta dada en el cuestionario (perfil) y el razonamiento usado por el estudiante en la entrevista. Además, los estudiantes tenían un alto nivel de confianza en sus razonamientos.

Palabras clave: fracciones, sesgo del número natural, pensamiento en diferencias, estudio cualitativo, educación primaria y secundaria.

Abstract

Previous quantitative studies have shown students' difficulties in understanding the magnitude of fractions. This is often explained by the natural number bias or the use of other incorrect reasoning such as gap thinking. However, qualitative studies that support these interpretations are scarce. In the current research, we interview 52 seventh grade students belonging to different profiles obtained in a previous quantitative study. The objective is to examine students' reasoning used in fraction magnitude and students' level of confidence in the reasoning used. Results show a high consistency between the reasoning of the students during the interview and the profile in which they were identified. Furthermore, students had a high level of confidence in their reasoning.

Keywords: fractions, natural number bias, gap thinking, qualitative study, primary and secondary education.

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

Investigaciones previas han mostrado que los estudiantes de educación primaria y secundaria, e incluso universitarios, tienen dificultades con algunos aspectos de los números racionales (Behr, Wachsmuth, Post y Lesh, 1984; Smith, 1995) siendo una de las posibles causas el uso inapropiado del conocimiento sobre los números naturales cuando se trabaja con los racionales (Moss y Case, 1999; Ni y Zhou, 2005). La tendencia a usar el conocimiento sobre los números naturales en los números racionales se ha denominado sesgo del número natural (*natural number bias*) (Van Dooren, Lehtinen, y Verschaffel, 2015).

Centrándonos en la magnitud de los números racionales, frecuentemente los estudiantes de educación primaria y secundaria usan su conocimiento sobre la ordenación de los números naturales para comparar fracciones, considerando que una fracción es mayor cuando su numerador, denominador o ambos son mayores (por ejemplo, $18/24$ es mayor que $12/20$ “porque 18 es mayor que 12 y 24 mayor que 20”) (Behr et al., 1984; González-Forte, Fernández y Llinares, 2018; Stafylidou y Vosniadou, 2004). Además, en la comparación de números decimales tienden a creer que el número con más dígitos en la parte decimal es el número mayor, considerando por ejemplo que 0.37 es mayor que 0.6 “porque 37 es mayor que 6” (Resnick et al., 1989).

Sin embargo, la mayoría de estos estudios son de carácter cuantitativo, en los que han propuesto ítems de comparación de fracciones y números decimales (de elección múltiple) que son congruentes e incongruentes con el conocimiento de los números naturales. Los ítems congruentes son aquellos en los que un conocimiento sobre los naturales permite obtener una respuesta correcta. Por ejemplo, ítems de comparación de fracciones en los que la fracción mayor tiene el numerador y el denominador mayores ($3/5$ vs. $8/9$), o ítems de comparación de decimales donde el número mayor tiene más dígitos en la parte decimal (0.72 vs. 0.2). Los ítems incongruentes son aquellos en los que el uso del conocimiento sobre los números naturales lleva a una respuesta incorrecta. Por ejemplo, ítems de comparación de fracciones donde la fracción mayor tiene el numerador y denominador menores ($2/3$ vs. $4/9$), o ítems de comparación de decimales donde el número mayor tiene menos dígitos en la parte decimal (0.6 vs. 0.47). Los resultados de estos estudios muestran como estudiantes de primaria y secundaria, e incluso universitarios, resuelven correctamente los ítems congruentes, pero tienen dificultades en los ítems incongruentes (DeWolf y Vosniadou, 2015; Durkin y Rittle-Johnson, 2015; González-Forte et al., 2018; Van Hoof, Lijnen, Verschaffel y Van Dooren, 2013), poniendo de manifiesto, a través de hipótesis, que las dificultades pueden ser debidas al uso del conocimiento de los números naturales para comparar fracciones o números decimales.

Centrándonos en las investigaciones sobre comparación de fracciones, no todas han obtenido resultados en la misma dirección: mayores niveles de éxito en los ítems congruentes que en los incongruentes. Varios estudios han mostrado que estudiantes de educación primaria y secundaria presentan un alto nivel de éxito en ítems incongruentes y un bajo rendimiento en los congruentes (Gómez y Dartnell, 2018). Este resultado también ha sido obtenido con estudiantes universitarios (Barraza, Avaria y Leiva, 2017; DeWolf y Vosniadou, 2015). Estos resultados ponen de manifiesto que el uso del conocimiento sobre los naturales quizás no sea la única razón que explique las dificultades de los estudiantes para comparar fracciones; y resaltan la necesidad de tener en cuenta otros posibles razonamientos usados por los estudiantes.

Una posible explicación podría ser el uso de un razonamiento conocido como sesgo inverso (*reverse bias*), que se basa en la comparación de los denominadores, considerando como fracción mayor aquella con el denominador menor (Fazio, DeWolf, y Siegler, 2016; Rinne, Ye y Jordan, 2017; Stafylidou y Vosniadou, 2004). Este razonamiento, centrado en la idea de que los denominadores más pequeños indican que la cantidad dividida tiene partes más grandes, lleva a los estudiantes a considerar que $2/3$ es mayor que $3/5$ “porque 3 piezas son más grandes que 5” (Pearn y Stephens, 2004, p. 434). El uso de este razonamiento podría ser la causa por la que algunos estudiantes de primaria y secundaria resuelven correctamente los ítems incongruentes (en los que la fracción mayor tiene numerador y denominador menores), e incorrectamente los ítems congruentes (en los que la fracción mayor tiene numerador y denominador mayores) (Barraza et al., 2017; DeWolf y Vosniadou, 2015; Gómez y Dartnell, 2018). Otra posible explicación a las diferencias encontradas en el nivel de éxito entre ítems incongruentes y congruentes puede ser el empleo del pensamiento en diferencias (*gap thinking*) (Pearn y Stephens, 2004). Esta estrategia se basa en comparar la diferencia (absoluta) entre numerador y denominador en ambas fracciones. En este sentido, una fracción se considera mayor si la diferencia entre el numerador y el denominador es

menor (ej.: $\frac{2}{3}$ es mayor que $\frac{7}{9}$ “porque de 2 a 3 hay una diferencia de uno y de 7 a 9 hay una diferencia de dos”) (Fazio et al., 2016; Pearn y Stephens, 2004; Stafylidou y Vosniadou, 2004). Los resultados han mostrado que el pensamiento en diferencias parece influir en las diferencias entre los niveles de éxito en los ítems congruentes e incongruentes en estudiantes de educación secundaria (González-Forte, Fernández y Van Dooren, 2018) y en universitarios (Gómez, Silva y Dartnell, 2017), pues resolvían correctamente los ítems donde el pensamiento en diferencias conducía a la respuesta correcta (ej.: $\frac{5}{7}$ vs. $\frac{2}{5}$, donde la fracción mayor tiene menor diferencia entre numerador y denominador), e incorrectamente los ítems donde el pensamiento en diferencias conducía a la respuesta incorrecta (ej.: $\frac{1}{3}$ vs. $\frac{5}{8}$, donde la fracción mayor tiene mayor diferencia entre numerador y denominador).

Nuestro estudio, que es parte de una investigación más amplia llevada a cabo con 1262 estudiantes de educación primaria y secundaria, se centra en esta línea de investigación indagando acerca de los razonamientos que utilizan los estudiantes de educación primaria y secundaria cuando resuelven tareas de comparación de fracciones.

En un estudio cuantitativo previo, estos 1262 estudiantes respondieron a un cuestionario de elección múltiple con 31 ítems de comparación de fracciones y de números decimales, específicamente diseñados para detectar respuestas basadas en el sesgo del número natural, pensamiento en diferencias o sesgo inverso. De esta manera, había ítems congruentes con un razonamiento basado en el sesgo del número natural (ej.: $\frac{5}{8}$ vs. $\frac{2}{7}$), ítems incongruentes con un razonamiento basado en el sesgo del número natural (ej.: $\frac{2}{3}$ vs. $\frac{3}{7}$), ítems donde un razonamiento basado en el pensamiento en diferencias lleva a la respuesta correcta (ej.: $\frac{3}{7}$ vs. $\frac{7}{9}$), e ítems donde el pensamiento en diferencias lleva a una respuesta incorrecta (ej.: $\frac{5}{9}$ vs. $\frac{1}{3}$). Además, el empleo de ítems congruentes e incongruentes con el conocimiento sobre el número natural también permite examinar la presencia del razonamiento de sesgo inverso, pues este razonamiento permite resolver correctamente los ítems incongruentes e incorrectamente los congruentes. En cuanto a los ítems con números decimales, había ítems congruentes con un razonamiento basado en el sesgo del número natural (ej.: 0.400 vs. 0.25), e ítems incongruentes con un razonamiento basado en el sesgo del número natural (ej.: 0.36 vs. 0.5).

Mediante un análisis *TwoStep Cluster* se determinaron seis perfiles de estudiantes: estudiantes que respondieron a todos (o casi todos) los ítems correctamente (perfil *Correcto*), estudiantes que resolvieron incorrectamente todos los ítems incongruentes, tanto con fracciones como con números decimales, y resolvieron correctamente los ítems congruentes (perfil *Full NNB -estudiantes completamente sesgados por el número natural*), estudiantes que tuvieron dificultades en los ítems incongruentes con fracciones, pero resolvieron correctamente los ítems congruentes e incongruentes con números decimales (perfil *Fraction NNB -estudiantes sesgados por el número natural en ítems de fracciones*), estudiantes que tuvieron dificultades solo en los ítems en los que el pensamiento en diferencias conducía a la respuesta incorrecta (perfil *GT*), estudiantes que resolvieron de manera incorrecta los ítems congruentes con fracciones y resolvieron correctamente los incongruentes, y con números decimales resolvieron correctamente los ítems congruentes e incongruentes (perfil *RB -sesgo inverso*), y estudiantes que resolvieron los ítems sin ningún patrón identificable (*Resto*).

Los perfiles obtenidos, basados en patrones de respuesta ante los ítems, evidencian diferentes formas de resolver los ítems de comparación de números racionales. En cada perfil se deduce implícitamente el razonamiento empleado por los estudiantes, pero no se tienen evidencias cualitativas que lo justifiquen. El objetivo de este estudio es proporcionar evidencias cualitativas (validar) de los resultados obtenidos en el estudio cuantitativo analizando la consistencia entre la respuesta dada en el cuestionario (perfil) y el razonamiento usado por el estudiante en una entrevista. Además, también estamos interesados en examinar el grado de confianza que los estudiantes tienen en su razonamiento, con el fin de identificar en qué medida los razonamientos incorrectos son estables. Según Fischbein (1987), los conocimientos intuitivos de los estudiantes

tienen un carácter obvio y evidente, creando una gran confianza en su uso y persistiendo a lo largo del aprendizaje. De este modo, examinar el grado de confianza en las respuestas de los estudiantes nos permitirá conocer el nivel de consolidación y arraigo que tiene cada uno de los razonamientos incorrectos en los estudiantes, y las posibles razones de su desconfianza.

MÉTODO

Participantes e instrumento

Los participantes fueron 52 estudiantes de 1º de ESO: 15 estudiantes del perfil *Correcto*, 14 estudiantes del perfil *GT*, 15 estudiantes de los perfiles *Full NNB* y *Fraction NNB* (en conjunto, perfil *NNB*), y 8 estudiantes del perfil *RB*. Las entrevistas se realizaron de manera individual y fueron grabadas en vídeo, tras previo consentimiento de los padres. No hubo tiempo límite, y en ellas el estudiante podía realizar todo tipo de cálculos, anotaciones y dibujos que considerase oportunos. Tuvieron una duración aproximada de entre 10 y 15 minutos.

La entrevista se dividió en dos fases. En la Fase 1, el investigador mostraba al estudiante cuatro respuestas suyas a cuatro ítems de comparación de fracciones del cuestionario que había resuelto previamente. El estudiante, tras observar su respuesta, debía de explicar cómo había obtenido la fracción mayor. Los ítems usados para la entrevista fueron: $2/3$ vs. $7/9$, $4/7$ vs. $1/3$, $4/5$ vs. $5/8$ y $2/3$ vs. $3/7$. Los ítems $2/3$ vs. $7/9$ y $4/7$ vs. $1/3$ son congruentes con un razonamiento basado en el sesgo del número natural, e incongruentes con razonamientos basados en el pensamiento en diferencias o de sesgo inverso. En cambio, los ítems $4/5$ vs. $5/8$ y $2/3$ vs. $3/7$ son congruentes con razonamientos basados en el pensamiento en diferencias y de sesgo inverso, e incongruentes con un razonamiento basado en el sesgo del número natural. De este modo, se espera que los estudiantes que respondieron correctamente los ítems congruentes e incorrectamente los incongruentes en el cuestionario (perfil *NNB*), razonen basándose en el conocimiento sobre el número natural, considerando que la fracción mayor es aquella con numerador y denominador mayores. En el caso de los estudiantes que respondieron de forma correcta los ítems donde un razonamiento basado en el pensamiento en diferencias lleva a la respuesta correcta e incorrectamente los ítems donde el pensamiento en diferencias lleva a una respuesta incorrecta (perfil *GT*), se espera que en la entrevista razonen basándose en la diferencia entre numerador y denominador, considerando que la fracción mayor es aquella con menor diferencia entre ambos. Por último, se espera que los estudiantes que respondieron correctamente los ítems incongruentes (donde el razonamiento de sesgo inverso lleva a la respuesta correcta) e incorrectamente los ítems congruentes (donde el razonamiento de sesgo inverso lleva a la respuesta incorrecta) (perfil *RB*), razonen basándose en el tamaño de los denominadores, considerando como fracción mayor aquella con el denominador menor. Además, en esta fase, con el fin de conocer el grado de confianza de cada estudiante en su razonamiento, el estudiante tenía que decir cuánta seguridad tenía de que su respuesta fuera correcta. Para ello, debían de elegir una respuesta de la siguiente escala: (1) Dudo bastante, (2) Dudo, (3) Casi seguro, y (4) Muy seguro.

En la Fase 2, se les proporcionó dos ítems con tres respuestas ficticias, dadas en el mismo formato que los ítems del cuestionario. De este modo, los estudiantes podían considerar que se trataba de respuestas reales de otros compañeros. Se mostró el ítem $1/3$ vs. $5/8$, que es congruente con un razonamiento basado en el sesgo del número natural, e incongruente con razonamientos basados en el pensamiento en diferencias y de sesgo inverso; y el ítem $4/7$ vs. $3/4$, que es congruente con razonamientos basados en el pensamiento en diferencias y de sesgo inverso, e incongruente con un razonamiento basado en el sesgo del número natural. Las respuestas ficticias proporcionadas incluían la elección de la fracción mayor y el razonamiento escrito del estudiante en cada caso, por lo que se incluyeron los razonamientos basados en el sesgo del número natural, pensamiento en diferencias y de sesgo inverso (Tabla 1). Los estudiantes tenían que indicar y justificar con cuáles de ellas estaban de acuerdo y explicar por qué no estaban de acuerdo con las otras.

Tabla 1. Respuestas ficticias de estudiantes mostradas en la Fase 2

Ítem	Respuesta
1/3 vs. 5/8	Pere (Pensamiento en diferencias): Es 1/3 porque de 1 a 3 hay 2 y de 5 a 8 hay 3, por lo que en 1/3 la diferencia entre el numerador y el denominador es menor. Marta (Sesgo del número natural): Es 5/8 porque 5 es más grande que 1 y 8 es más grande que 3. Es decir, los números son más grandes y por tanto 5/8 es mayor. Andrés (Sesgo inverso): Es 1/3 porque 3 es más pequeño que 8, y si el denominador es más pequeño, la fracción es mayor.
4/7 vs. 3/4	María (Pensamiento en diferencias): Es 3/4 porque de 3 a 4 hay 1 y de 4 a 7 hay 3, por lo que en 3/4 la diferencia entre el numerador y el denominador es menor. Roberto (Sesgo del número natural): Es 4/7 porque 4 es más grande que 3 y 7 es más grande que 4. Es decir, los números son más grandes y por tanto 4/7 es mayor. Alicia (Sesgo inverso): Es 3/4 porque 4 es más pequeño que 7, y si el denominador es más pequeño, la fracción es mayor.

Análisis

El análisis se realizó en dos fases. En primer lugar, se analizó el razonamiento usado por los estudiantes durante las dos fases de la entrevista, para conocer la consistencia entre la respuesta dada en el cuestionario (perfil) y el razonamiento usado en la entrevista. Este análisis nos permite identificar formas de razonar que usan los estudiantes cuando comparan fracciones y, por tanto, evidenciar cualitativamente los resultados del estudio cuantitativo. En segundo lugar, se analizaron los niveles de confianza. Con las puntuaciones obtenidas en la escala de confianza [1-4] se calcularon las puntuaciones medias en cada uno de los perfiles (calculando porcentajes sobre 10).

RESULTADOS

El análisis cualitativo apoya (valida) los resultados obtenidos en el estudio cuantitativo, ya que la mayoría de los estudiantes entrevistados de cada perfil usaron razonamientos en las entrevistas consistentes con las respuestas que habían dado en el cuestionario. A continuación, se muestran ejemplos de razonamientos de estudiantes pertenecientes a cada uno de los perfiles entrevistados.

Trece de 15 estudiantes del perfil *Correcto* fueron consistentes con su razonamiento en el estudio cuantitativo. Es decir, estos estudiantes utilizaron un razonamiento correcto en la Fase 1 y no eligieron como correcta ninguna de las respuestas de estudiantes proporcionadas en la Fase 2. Las tablas 2 y 3 muestran las explicaciones dadas por uno de estos estudiantes (P196) en ambas fases. En ambas tablas se observa cómo este estudiante usa un razonamiento correcto.

Tabla 2. Respuestas del estudiante P196 del perfil *Correcto* durante la Fase 1

Ítem	Razonamiento
2/3 vs. 7/9	7/9 es mayor porque 2/3 es dos terceras partes y 7/9 supera las dos terceras partes, que serían 6/9.
4/5 vs. 5/8	4/5 es mayor porque 4/5 supera mucho la mitad y 5/8 muy poco. Utilizo la mitad para comparar.
4/7 vs. 1/3	4/7 es mayor porque 1/3 es menos que la mitad y 4/7 es más que la mitad.
2/3 vs. 3/7	2/3 es mayor porque 2/3 es más que la mitad y 3/7 es menos que la mitad.

Tabla 3. Respuestas del estudiante P196 del perfil *Correcto* durante la Fase 2

Ítem	Respuesta	Razonamiento
1/3 vs. 5/8	Ninguno	Pere
		Marta
		Andrés
4/7 vs. 3/4	Ninguno	María

Roberto	Es incorrecta. Es posible que una fracción tenga numerador y denominador bajos, y la fracción sea mayor.
Alicia	Es incorrecta. Porque puede ser $1/4$ y $4/7$ y seguiría siendo mayor $4/7$. Es una estrategia que no siempre sirve.

Nueve de 14 estudiantes del perfil *GT* permanecieron consistentes con su razonamiento. Estos estudiantes utilizaron un razonamiento basado en el pensamiento en diferencias en la Fase 1 y eligieron la respuesta de Pere y María en la Fase 2. Por lo tanto, siempre consideraron que la fracción mayor era aquella con la menor diferencia entre el numerador y el denominador. Las tablas 4 y 5 muestran las explicaciones dadas por uno de estos estudiantes (P079) en ambas fases. Se observa cómo usan un pensamiento en diferencias.

Tabla 4. Respuestas del estudiante P079 del perfil *GT* durante la Fase 1

Ítem	Razonamiento
2/3 vs. 7/9	2/3 es mayor porque a 2/3 le quedaría 1 y a 7/9 le quedaría 2. Me basé en la distancia para marcar la fracción mayor
4/5 vs. 5/8	4/5 es mayor porque de 4 a 5 va 1, y de 5 a 8 va 3. Como en 4/5 hay menos distancia, esa es la fracción mayor.
4/7 vs. 1/3	1/3 es mayor porque en 1/3 hay 2 y en 4/7 hay 3. Como hay menos en 1/3, esa es la fracción mayor.
2/3 vs. 3/7	2/3 es mayor porque de 2 a 3 sólo hay 1, y en cambio de 3 a 7 hay 4. Es decir, a 2/3 le quedaría 1, y a 3/7 le quedaría 4. Cuanto menos quede, mayor es la fracción.

Tabla 5. Respuestas del estudiante P079 del perfil *GT* durante la Fase 2

Ítem*	Respuesta	Razonamiento
1/3 vs. 5/8	Pere	Estoy de acuerdo con Pere porque yo también habría marcado 1/3, ya que la distancia es menor que en 5/8.
4/7 vs. 3/4	María	Marta dice lo mismo que he dicho yo. Cuanta menos distancia haya entre los números, mayor es la fracción.

*El estudiante P079 no dijo nada acerca del resto de respuestas. Únicamente indicó y justificó que estaba de acuerdo con las respuestas de Pere y María.

Once de 15 estudiantes del perfil *NNB* fueron consistentes con su razonamiento. Es decir, estos estudiantes también se basaron en el orden de los números naturales para comparar las fracciones en la Fase 1 y eligieron la respuesta de Marta y Roberto en la Fase 2. Siempre consideraron que la fracción mayor es aquella con un numerador y denominador mayores. Las tablas 6 y 7 muestran las explicaciones dadas por uno de estos estudiantes (P074) en ambas fases. Se observa cómo sigue un razonamiento basado en el sesgo del número natural.

Tabla 6. Respuestas del estudiante P074 del perfil *NNB* durante la Fase 1

Ítem	Razonamiento
2/3 vs. 7/9	7/9 es mayor porque el 7 y 9 son números mayores. Me guío por los números, por el numerador y el denominador.
4/5 vs. 5/8	5/8 es mayor porque el 5 y el 8 son números mayores que los otros. Siempre comparo los números.
4/7 vs. 1/3	4/7 es mayor porque mi criterio es que, si el numerador y el denominador son números mayores, la fracción es mayor. Entonces, cuanto mayor sea el numerador y el denominador, mayor es la fracción.
2/3 vs. 3/7	3/7 es mayor porque el 3 y el 7 son números mayores.

Tabla 7. Respuestas del estudiante P074 del perfil *NNB* durante la Fase 2

Ítem*	Respuesta	Razonamiento
1/3 vs. 5/8	Marta	Este razonamiento es el que yo he hecho. Estaría de acuerdo con Marta. 5/8 es

	mayor porque los números son mayores.
4/7 vs. 3/4 Roberto	Estaría de acuerdo con Roberto porque que lo que yo creo. La fracción mayor es la que tiene números mayores. Por ejemplo, si en vez de 4/7 fuera 7/4 también sería mayor, porque los números son mayores. Si tuviera que decir una fracción mayor que 4/7 diría 5/7, o 5/8. Porque el 5 es mayor que el 4 y el 8 es mayor que el 7.

*El estudiante P074 no dijo nada acerca del resto de respuestas. Únicamente indicó y justificó que estaba de acuerdo con las respuestas de Marta y Roberto.

Seis de 8 estudiantes del perfil *RB* también fueron consistentes con su razonamiento en el estudio cualitativo. Estos estudiantes se basaron en el razonamiento de sesgo inverso en la Fase 1 y eligieron las respuestas de Andrés y Alicia en la Fase 2. Estos estudiantes siempre consideraron que la fracción mayor es aquella con el denominador menor. Las tablas 8 y 9 muestran las explicaciones dadas por uno de estos estudiantes (P022) en ambas fases. Se observa cómo sigue un razonamiento de sesgo inverso.

Tabla 8. Respuestas del estudiante P022 del perfil *RB* durante la Fase 1

Ítem	Razonamiento
2/3 vs. 7/9	2/3 es mayor porque el 3 es más pequeño que el 9.
4/5 vs. 5/8	4/5 es mayor porque el 5 es más pequeño que el 8.
4/7 vs. 1/3	1/3 es mayor porque me fijo en el denominador, es decir, en el 3 y en el 7. Como el 3 es más pequeño que el 7, marco 1/3. Es decir, si el denominador es más pequeño que el otro, marco la fracción que tenga el denominador más pequeño.
2/3 vs. 3/7	2/3 es mayor porque me fijo en el denominador. Miro si el denominador es mayor o menor. La fracción con el denominador más pequeño es la fracción mayor. Es decir, como en 2/3 el denominador es más pequeño que en 3/7, la fracción es mayor.

Tabla 9. Respuestas del estudiante P022 del perfil *RB* durante la Fase 2

Ítem*	Respuesta	Razonamiento
1/3 vs. 5/8 Andrés		Esta es la misma que he dicho yo. Es como pienso yo. La fracción con el denominador más pequeño es la fracción mayor.
4/7 vs. 3/4 Alicia		Esta es la que he hecho yo. Cuanto más pequeño sea el numerador, mayor será la fracción. Yo creo que esta estaría bien.

*El estudiante P022 no dijo nada acerca del resto de respuestas. Únicamente indicó y justificó que estaba de acuerdo con las respuestas de Andrés y Alicia.

Los estudiantes que fueron inconsistentes con su razonamiento durante la entrevista respondieron en una de las dos fases de la misma manera que su perfil, pero en la otra fase cambiaron su forma de razonar, o respondieron ambas fases de la entrevista con un razonamiento diferente al de su perfil.

La Tabla 10 muestra el porcentaje de confianza de cada perfil en los cuatro ítems. Únicamente se tuvieron en cuenta las puntuaciones de los estudiantes que fueron consistentes con su razonamiento durante las entrevistas (es decir, aquellos estudiantes que razonaron en la entrevista del mismo modo que el perfil en el que estaban incluidos). Esta tabla muestra que los estudiantes del perfil *Correcto*, quienes resolvieron correctamente tanto el cuestionario como la entrevista, tienen más confianza en sus razonamientos que los estudiantes del resto de los perfiles. Sin embargo, los porcentajes de confianza de los perfiles *GT*, *NNB* y *RB* también muestran una alta seguridad de estos estudiantes en su razonamiento, puesto que están alrededor de un 80%. De este modo, pese a tratarse de estudiantes que emplean razonamientos incorrectos, una alta confianza en sus razonamientos indica que, para ellos, el razonamiento empleado es totalmente válido.

Tabla 10. Porcentaje de confianza de los perfiles en cada ítem.

	2/3 vs. 7/9	4/5 vs. 5/8	4/7 vs. 1/3	2/3 vs. 3/7
Correcto	94.3	94.3	100	98.0
GT	86.0	83.3	80.5	83.3
NNB	79.6	77.3	81.8	77.3
RB	75.0	75.0	75.0	79.3

Analizando el nivel de confianza de los perfiles que se basan en razonamientos incorrectos, se observa como el perfil *GT* es el perfil con mayor confianza en su razonamiento. Es decir, tienen más confianza en que su estrategia (pensamiento en diferencias) es correcta, que los estudiantes de los perfiles *NNB* y *RB* con sus respectivas estrategias (sesgo del número natural y sesgo inverso).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La presente investigación tiene como objetivo proporcionar evidencias cualitativas (validar) de los resultados obtenidos en el estudio cuantitativo analizando la consistencia entre la respuesta dada en el cuestionario (perfil) y el razonamiento usado por el estudiante en una entrevista. Además, se examina el grado de confianza que los estudiantes tienen en su razonamiento, con el fin de identificar en qué medida los razonamientos incorrectos son estables.

Los resultados nos han permitido dar evidencias que sustentan la existencia de diferentes formas de razonar acerca de la magnitud de una fracción, particularmente en el contexto de la comparación de fracciones. De esta manera, apoyan la existencia de tres formas incorrectas de razonar sobre la magnitud de la fracción en tareas de comparación de fracciones: razonamiento basado en el uso del conocimiento del número natural “una fracción es mayor cuando su numerador, denominador o ambos son mayores” (sesgo del número natural) (Behr et al., 1984; Stafylidou y Vosniadou, 2004), razonamiento basado en la diferencia entre numerador y denominador “una fracción es mayor si la diferencia entre el numerador y el denominador es menor” (pensamiento en diferencias) (Pearn y Stephens, 2004; Stafylidou y Vosniadou, 2004), y razonamiento basado en el tamaño del denominador “la fracción mayor es aquella con el denominador menor” (sesgo inverso) (Fazio et al., 2016; Rinne et al., 2017; Stafylidou y Vosniadou, 2004). Estos datos cualitativos proporcionan evidencias a las hipótesis obtenidas en nuestro estudio cuantitativo previo y en otras investigaciones cuantitativas previas, en las que hubo un alto nivel de éxito en ítems incongruentes (con el conocimiento del número natural) y un bajo rendimiento en ítems congruentes (Barraza et al., 2017; DeWolf y Vosniadou, 2015; Gómez y Dartnell, 2018). Además, los resultados muestran persistencia en el empleo del razonamiento, ya que durante la última parte de la entrevista se les mostraron varios tipos de razonamientos incorrectos, pero la mayoría fueron consistentes con la elección de la misma forma de razonar que habían empleado tanto en el cuestionario como en la primera fase de la entrevista. Por otra parte, hubo estudiantes que fueron inconsistentes, es decir, cambiaron su forma de razonar del cuestionario a la entrevista. La mayoría de estos estudiantes cambiaron su forma de razonar durante la Fase 2, en la que dudaron de su forma de razonar cuando se les mostró otras respuestas de estudiantes. Además, las entrevistas se llevaron a cabo dos meses después de la realización del cuestionario, por lo que los estudiantes pudieron modificar su forma de razonar durante este tiempo.

En cuanto al nivel de confianza en los razonamientos de cada uno de los perfiles, los resultados muestran como el perfil *Correcto*, que aplica razonamientos correctos, muestra un alto nivel de confianza. Sin embargo, pese a que los porcentajes de los tres perfiles que emplean formas de razonar incorrectas (*GT*, *NNB* y *RB*) son menores que los del perfil *Correcto*, éstos se encuentran entre el 75% y el 85%, por lo que tienen altos índices de confianza en su razonamiento, incluso en ítems en los que les llevaba a la respuesta equivocada. Este resultado nos lleva a considerar que los estudiantes no solo usan un razonamiento incorrecto cuando comparan fracciones, sino que tienen

un alto grado de confianza en su razonamiento incorrecto. Por lo tanto, parece que son razonamientos consolidados y difíciles de cambiar durante el aprendizaje (Fischbein, 1987).

Referencias

- Barraza, P., Avaria, R. y Leiva, I. (2017). The role of attentional networks in the access to the numerical magnitude of fractions in adults/El rol de las redes atencionales en el acceso a la magnitud numérica de fracciones en adultos. *Estudios de Psicología*, 38(2), 495-522.
- Behr, M., Wachsmuth, I., Post T. y Lesh R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(5), 323-341.
- DeWolf, M. y Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction*, 37, 39-49.
- Durkin, K. y Rittle-Johnson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. *Learning and Instruction*, 37, 21-29.
- Fazio, L. K., DeWolf, M. y Siegler, R. S. (2016). Strategy use and strategy choice in fraction magnitude comparison. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 42(1), 1-16.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company.
- Gómez, D. M. y Dartnell, P. (2018). Middle schoolers' biases and strategies in a fraction comparison task. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 40, 1-18.
- Gómez, D. M., Silva, E. y Dartnell, P. (2017). Mind the gap: congruency and gap effects in engineering students' fraction comparison. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh y B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 353-360. Singapore: PME.
- González-Forte, J. M., Fernández, C. y Llinares, S. (2018). La influencia del conocimiento de los números naturales en la comprensión de los números racionales. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 241-250). Gijón: SEIEM.
- González-Forte, J. M., Fernández, C. y Van Dooren, W. (2018). Gap and congruency effect in fraction comparison. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg y L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 2, 459-466. Umeå, Sweden: PME.
- Moss, J. y Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 122-147.
- Ni, Y. y Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27-52.
- Pearn, C. y Stephens, M. (2004). Why you have to probe to discover what year 8 students really think about fractions. En I. Putt, R. Faragher y M. McLean (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 430-437). Sydney, Australia: MERGA.
- Rinne, L. F., Ye, A. y Jordan, N. C. (2017). Development of fraction comparison strategies: A latent transition analysis. *Developmental Psychology*, 53(4), 713.
- Smith, J. P. (1995). Competent reasoning with rational numbers. *Cognition and Instruction*, 13(1), 3-50.
- Stafylidou, S. y Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14(5), 503-518.
- Van Dooren, W., Lehtinen, E. y Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction*, 37, 1-4.

Van Hoof, J., Lijnen, T., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2013). Are secondary school students still hampered by the natural number bias? A reaction time study on fraction comparison tasks. *Research in Mathematics Education*, 12(2), 154-164.

ⁱ Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo de la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport (Generalitat Valenciana, España) (PROMETEO/2017/135) y con el apoyo de la Universidad de Alicante (UAFPU2018-035).