

DOBLANDO PAPEL PARA DESDOBLAR ARGUMENTOS: UNA EXPERIENCIA EN LA CLASE DE GEOMETRÍA

Folding paper to unfold arguments: an experience in geometry class

Sua, C., Velandia, M. y Alba, A.

Universidad Pedagógica Nacional

Resumen

La geometría del doblado del papel es una geometría alternativa a la euclidiana. A través de puntos y dobleces que corporeizan rectas, se puede acceder a la representación de muchos objetos geométricos en una hoja de papel, vista como un plano. Esto lleva al reconocimiento de nuevas formas de representar, comunicar y argumentar propiedades. A partir de la experiencia con un grupo de estudiantes de educación secundaria, en la que se implementaron tareas soportadas en esta nueva geometría, se analiza la emergencia y naturaleza de los argumentos allí presentes. De esta forma se presenta una posibilidad para el trabajo en aula.

Palabras clave: geometría del doblado del papel, argumentos, humanos-con-medios, dobleces.

Abstract

Paper folding geometry is an alternative geometry to the Euclidean. Through points and folds which embody lines, you can access the representation of many geometric objects on a paper sheet, seen as a plane. This leads to the recognition of new ways of representing, communicating and arguing properties. Based on the experience with a group of secondary school students, in which tasks supported in this new geometry were implemented, the emergence and nature of the arguments present are analysed. In this way, a possibility for classroom work is presented.

Keywords: paper folding geometry, arguments, humans-with-media, folds.

INTRODUCCIÓN

Hay una idea ampliamente aceptada en el campo de la educación matemática sobre la incidencia positiva de los recursos tecnológicos digitales en los procesos de la actividad matemática (v. g. visualizar, conjeturar, resolver problemas). En el caso de la geometría esto no es distinto, pues se reconoce que los programas de geometría dinámica (en adelante PGD) han aportado al logro de estos procesos. En particular, varios estudios muestran la incidencia de los PGD en el desarrollo de la argumentación y las conexiones que estos promueven entre dimensiones empíricas y teóricas (v. g. Samper y Toro, 2017). A pesar de ello, en algunas instituciones educativas no se tiene acceso a estos recursos, lo que lleva a decir que las bondades que la tecnología digital ofrece se convierten en asuntos inalcanzables en estos contextos. Para sortear esta dificultad algunos esfuerzos ya han sido realizados y se reconocen algunos avances investigativos.

Santa y Jaramillo (2013) reconocen en el doblado de papel una posibilidad de fácil acceso para atender la problemática ya mencionada. De acuerdo con estos autores, este es un medio de fácil manipulación, a través del cual se pueden representar, observar y comparar propiedades de construcciones, hacer inferencias sobre los objetos representados y apoyar además la emergencia de la argumentación. Sin embargo, la presencia de este recurso lleva a considerar una naturaleza particular de los objetos geométricos corporeizados, una con características especiales dado el medio donde estos se materializan. Por lo anterior, podría considerarse que la naturaleza de los argumentos presentes al incorporar este nuevo recurso podría diferir a la que se podría evidenciar al trabajar con

PGD (arrastrar objetos geométricos para corroborar propiedades y sustentar estas con base en evidencia empírica).

Lo anterior permite ver que el doblado de papel provee una oportunidad para el desarrollo de la argumentación, una con posibles características particulares; el doblado de papel además es un medio pertinente cuando no se tiene acceso a recursos tecnológicos digitales. Sin embargo, no se reconocen estudios que expongan la naturaleza de los argumentos promovidos por este medio. El objetivo de este trabajo es estudiar la presencia y naturaleza de los argumentos promovidos por la incorporación del doblado de papel en la clase de geometría. Estudiamos la presencia de argumentos en una clase de geometría del nivel escolar en la que se involucró este medio y caracterizamos la naturaleza de estos argumentos. Presentamos en este documento los referentes conceptuales adoptados, la estrategia metodológica involucrada y el análisis de algunos argumentos observados durante el trabajo de estudiantes alrededor de tareas soportadas en el doblado del papel. Posteriormente presentamos algunas conclusiones y proyecciones del estudio.

REFERENTES CONCEPTUALES

Geometría del doblado de papel

La Geometría del Dobrado de Papel (GDP) es propuesta por Santa y Jaramillo (2013) para referirse al trabajo con doblado de papel en el que se realizan construcciones geométricas alternas a las elaboradas con regla y compás. Estos autores afirman que la GDP posibilita la asimilación de conceptos geométricos, dado que favorece procesos de visualización y experimentación al realizar construcciones precisas como las de regla y compás. En el trabajo con este medio se favorecen procesos de justificación ligados a acciones realizadas sobre el papel, al acudir a un sistema axiomático de referencia establecido previamente. Con el paso del tiempo se ha consolidado un sistema de axiomas similares a los de la geometría euclidiana (Huzita y Hatori, 2003; citados en Santa y Jaramillo, 2013), a través de estos se pueden justificar las construcciones realizadas con doblado de papel. En la GDP, Santa y Jaramillo (2013) establecen una relación entre los conceptos primitivos de la geometría euclidiana con la del doblado de papel. La recta se representa en el papel con un doblez que, aunque limitado por las restricciones de la hoja, ostenta la similitud de una línea recta la cual es infinita. El punto tiene su representación en la intersección de dos o más dobleces o la huella del lápiz, a la hoja de papel se le adjudica la noción abstracta de plano.

Humanos-con-medios

Borba y Villarreal (2006) proponen el constructo Humanos-con-medios, el cual habla del rol que desempeñan los medios en la generación del conocimiento. En este constructo los seres humanos y los medios son concebidos como una unidad inseparable. Por consiguiente, la cognición no es una labor de carácter individual sino de tipo colectivo, la cual involucra artefactos y herramientas para generar conocimiento (Villa-Ochoa y Borba, 2011). Para estos autores cualquier tecnología puede considerarse como medio y esta no es neutral al tipo de conocimiento producido. Villarreal (2013), al explicar la perspectiva tenida en cuenta en Humanos-con-medios, declara que el concepto tecnología no solo se relaciona con aparatos sofisticados, sino que va más allá, pues son las creaciones realizadas por el hombre a lo largo de la historia, sus usos y aplicaciones. Según Villarreal (2013) los elementos comunes que están en las aulas de clase, como lápiz, cuaderno y tablero, entre otros, no siempre estuvieron allí y con su llegada modificaron el trabajo escolar. Por lo anterior, se señala que hay una influencia de los medios usados en la generación de conocimiento, los cuales determinan la práctica, el contenido y la manera de conocer.

Alrededor del constructo Humanos-con-medios se han propuesto las ideas de substitución, suplementación y reorganización. Tikhomirov (1981; citado en Villarreal, 2013) analiza el rol del computador en su relación con las personas desde un punto de vista psicológico. Al referirse a substitución se considera que el ser humano puede ser sustituido por la computadora en su trabajo

intelectual ya que esta puede resolver problemas que el hombre soluciona. En el caso de la suplementación se señala a la computadora como complemento del pensamiento humano al dar celeridad y volumen al procesamiento de la información. Finalmente, la reorganización hace alusión a que la implementación de la computadora por el hombre condiciona su actividad de orden intelectual, dado que interviene la estructura de dicha intelectualidad. Lo anterior deja ver a la computadora como algo más que un mecanismo de apoyo, ahora es un transformador de la actividad humana (Villarreal, 2013). Considerando al papel como un medio a través del cual las ideas de un individuo se materializan, hemos acudido a la idea de suplementación. En esta vía reconocemos una suplementación carente (cuando el uso dado al papel es el mismo dado a cualquier otro medio), una parcial (cuando el papel adquiere un rol protagónico pero su uso se permea por otros medios), una total (cuando el papel se convierte en único medio en la solución de alguna tarea, pero se hace uso de sus propiedades físicas -forma rectangular-) y una única (similar a la total, sin que intervengan las propiedades físicas de la hoja).

La argumentación desde la perspectiva de Toulmin

De acuerdo con Toulmin, Rieke y Janik (1984, p. 14), la argumentación refiere la actividad de hacer aserciones, desafiarlas y apoyarlas con razones. Un argumento es la secuencia de aserciones y razones entrelazadas que, entre ellas, establecen el contenido y la fuerza de la posición que está sosteniendo un interlocutor. Toulmin et al. (1984) presentan los elementos que conforman todo argumento: (i) *aserción*, vista como el punto a donde se quiere arribar por medio de lo que se argumenta; (ii) *dato*, la fundamentación de la aserción, lo que motiva a hacer esa declaración, estos pueden ser estadísticos, empíricos, teóricos, etc.; (iii) *garantía*, la solidez de los datos que fundamentan la aserción, lo que le da credibilidad; (iv) *respaldo*, aquello que ofrece confiabilidad a la garantía.

Inglis y Mejía-Ramos (2005) resaltan la importancia de indagar los argumentos a partir del esquema completo de Toulmin que involucra dos elementos más respecto al anterior. En contraste con el esquema básico, el esquema completo (Figura 1) brinda una perspectiva no absolutista de las matemáticas, por lo que da lugar a la duda por parte de quien está argumentando. Se consideran entonces dos elementos adicionales: (v) *calificador modal*, que especifica la fuerza de la aserción, el grado de confianza de la conclusión y (vi) *refutador*, que corresponde a las excepciones de la aserción, aquellos casos en los cuales no se cumple la conclusión establecida en el argumento.

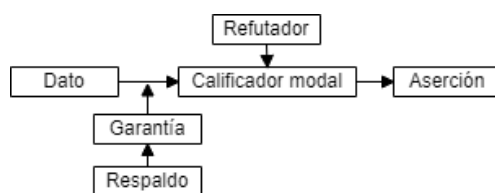


Figura 1. Esquema completo de Toulmin

Samper y Toro (2017), apoyados en Pedemonte (2007, citado en Samper y Toro, 2017) reconocen tres tipos de argumentos a partir de la relación entre el dato, la garantía y la aserción: *deductivos*, a partir de los datos y la garantía se deduce la aserción; *inductivo*, a partir de ejemplos particulares se deduce una regla y *abductivo*, a partir de una aserción se buscan condiciones que dan lugar a estas. Samper y Toro consideran que un argumento puede ser incompleto o completo, dada la presencia de los tres elementos básicos de este.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Analizamos la presencia y naturaleza de los argumentos exhibidos por estudiantes de nivel escolar al resolver tareas que involucra GDP, por ello nos situamos en un enfoque cualitativo. El estudio tiene una aproximación interpretativa (Miles y Huberman, 1994) a través de una investigación basada en diseño en la que se realizó un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

Contexto

El estudio se realizó con 31 estudiantes de grado octavo, cuyas edades oscilaban entre los 13 y 14 años, pertenecientes a una institución educativa ubicada en Bogotá (Colombia). En esta institución laboraba uno de los autores del estudio, quien se involucró como investigador y profesor. Los estudiantes tenían algunos conocimientos sobre planos, rectas y figuras geométricas, aunque estos se reducían a procedimientos memorísticos y algorítmicos, tampoco habían tenido experiencias con doblado de papel, lo que imponía una necesidad adicional al involucrar este medio.

Preparación del experimento: diseño de la secuencia

Se diseñaron veintiuna tareas alrededor de colinealidad, ángulos, paralelismo y perpendicularidad. A través de la resolución de problemas y apoyados en el doblado del papel se favorecía el uso de un lenguaje geométrico apropiado, la adopción de esquemas de construcción de los objetos geométricos involucrados y el establecimiento de definiciones y relaciones de dependencia (hechos geométricos) como parte de un sistema teórico. Las tareas podían ser de descubrimiento (establecer hechos geométricos o definiciones) o de profundización (justificar propiedades observadas).

Las tareas iniciales pedían realizar dobleces a partir de configuraciones específicas de puntos (colineales o no), lo que permitió establecer la definición de colinealidad y hechos geométricos como la existencia de infinitos dobleces por un punto o la unicidad de este por dos puntos. Posteriormente se estudiaron ángulos opuestos por el vértice, par lineal y congruentes a través de tareas que solicitaban construir un ángulo congruente a otro dado o dobleces perpendiculares. La noción de perpendicularidad se profundizó con tareas que pedían determinar y justificar si dos dobleces dados eran perpendiculares. A través de situaciones en que se solicitaba construir un doblez perpendicular a otros dos dados se introdujo la noción de paralelismo. Esta noción se profundizó en otras situaciones, ejemplo de ello es la última tarea propuesta, donde se solicitaba construir un hexágono regular a partir de un lado y un tercer vértice.

Experimentación: acopio de la información

La implementación se llevó a cabo durante diez semanas (4 horas semanales). Cada tarea involucraba dos momentos, uno en el que por parejas de estudiantes se daba solución a la tarea propuesta y otro en el que se socializaban en gran grupo los resultados obtenidos en el primer momento. Con ello se esperaba favorecer el intercambio de ideas y la emergencia de argumentos. Durante el trabajo en parejas se grabó la interacción sostenida por una única pareja, Brock y Max, elección que atendía al deseo de reconocer a lo largo del desarrollo de la secuencia la presencia y naturaleza de los argumentos evidenciados por un mismo grupo. Estos estudiantes se seleccionaron por su desempeño promedio en matemáticas, de acuerdo a sus calificaciones este no era alto o bajo, tampoco eran estudiantes que se destacaran por su participación, pues usualmente asumían una postura receptiva.

Análisis retrospectivo

Se elaboraron transcripciones de las interacciones que exhibían argumentos. En estos se analizaron aspectos como el tipo de argumento, la presencia de sus elementos y la suplementación del medio. Los argumentos se caracterizaban en atención a estos elementos teniendo en cuenta los códigos que aparecen en paréntesis angular [...] en la Tabla 1.

Tabla 1. Dispositivo analítico de los argumentos

Tipo	Elementos [0,1] ⁱ		Tipo de tarea	Suple. del medio	
Deductivo [D]	Dato	Respaldo	Profundización [L]	Carente [C]	Total [T]
Abductivo [A]	Aserción	Calificador	Descubrimiento [M]	Parcial [P]	Única [U]
Inductivo [I]	Garantía	Refutador			

DOS EJEMPLOS

Por motivos de extensión mostramos el análisis de dos argumentos observados en dos tareas distintas. El primer ejemplo presenta una tarea alrededor de la perpendicularidad, en esta se solicitaba que se construyeran dos dobleces perpendiculares y se justificara por qué funcionaba tal construcción. Los estudiantes contaban con la definición de congruencia de ángulosⁱⁱ y perpendicularidadⁱⁱⁱ. Las propuestas de construcción dadas por los estudiantes se apoyaban en hacer coincidir los bordes opuestos de las hojas, asegurando que los dobleces resultantes cumplieran lo solicitado. En lo que sigue mostramos la interacción entre un estudiante [Ec] y el profesor [P] al respecto.

1. Ec Trazamos un doblez por la mitad [de la hoja]. Trazamos un punto por el doblez [lo dibuja en la mitad del doblez], trazamos el otro doblez [hace coincidir los otros bordes opuestos de la hoja]. Así podíamos saber que está por la mitad del otro doblez, entonces con eso ya sabemos que cada uno va a tener 90 grados. Porque una línea [doblez] equivale a 180 grados.
2. P ¿Qué te garantiza que cada uno mide 90 grados?
3. Ec Cada línea recta [doblez] mide 180 y al partirla tiene 90 grados. O también se pueden sobreponer.
4. P ¿Qué pasa cuando se sobreponen? ¿A ver?
5. Ec Que las líneas van a coincidir.
6. P Y el hecho de que coincida ¿Qué significa?
7. Ec Que tienen la misma medida.

Para Ec el doblez representa 180 y el segundo doblez permite determinar ángulos congruentes, pues se pueden sobreponer, verificando que miden lo mismo, por eso cada uno mide 90. Reconocemos un argumento deductivo [D] que tiene lugar cuando el profesor cuestiona a Ec por la seguridad frente a su afirmación [2]. El dato es la construcción de dobleces en la hoja bajo el esquema presentado [1]. La garantía es la definición de ángulos congruentes [3], apoyo para declarar (aserción) que los ángulos miden 90 [1,3,7]. El respaldo al que acude Jet es la acción de doblar para sobreponer los ángulos [3]. No se reporta refutador, en cambio el calificador modal es de certeza. La suplementación en este caso es total [T] debido al sustento que provee el doblado de papel para sostener el argumento.

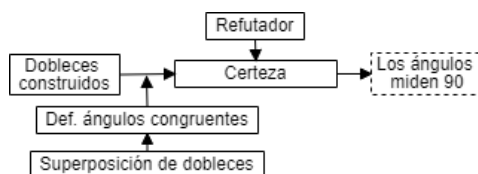


Figura 2. Esquema del argumento: construcción de dobleces perpendiculares

El segundo ejemplo tiene lugar al resolver la última tarea propuesta (construir un hexágono regular a partir del segmento AS y un tercer vértice llamado P, Figura 3a). Los estudiantes construyeron la mediatriz del segmento AS superponiendo A y S (Figura 3b). Esto les permitió determinar un cuarto vértice [N] al calcar a P (Figura 3c). Luego realizaron el doblez P y N, lo que les permitió construir los otros dos vértices [J y F] al calcar los puntos A y S (Figura 3d). En diálogo con el profesor, él les pregunta por la congruencia de lados y ángulos, lo cual es justificado por los estudiantes al superponer parejas de lados o ángulos y corroborar que estos coincidían. Ahora el profesor pregunta por la presencia de lados paralelos^{iv} en el polígono y la siguiente interacción toma lugar.

8. P ¿Qué dobleces hay paralelos ahí que contengan segmentos paralelos?
9. Ea Este [señala al doblez AN] y este [señala al doblez PF].
10. P ¿Cómo podría demostrar que los que usted señaló son paralelos?

11. Ea Pues ya tenemos acá el doblez del segmento [pliega la hoja por el doblez AN] y este [se refiere al doblez PF, pliega la hoja por tal doblez también], entonces para comprobar que son paralelos sobreponemos estos [sobrepone los dobleces sobre sí mismo simultáneamente]... Eso por el hecho geométrico [no menciona el hecho geométrico al que acude].
12. P Describa lo que está haciendo.
13. Ea Sobreponemos estos dos dobleces que decimos que son paralelos [manipula la hoja] y tienen que formar un doblez perpendicular a ellos dos para comprobar si son paralelos. O sea, si coinciden [superponer sobre sí mismo los dobleces, generando uno perpendicular a ambos].
14. P ¿Bueno y qué pasa?
15. Ea Se formó este doblez que es un doblez perpendicular a estos dos dobleces [AN y PF].



Figura 3. Construcción del hexágono regular

Apreciamos un argumento que involucra el paralelismo de los dobleces que contenían segmentos del hexágono regular. La forma en que se relacionan los elementos de dicho argumento deja ver que es de tipo deductivo [D]. En este, el dato es la construcción del hexágono. La aserción corresponde a declarar que los dobleces AN y PF son paralelos. La garantía se reconoce cuando Ea considera los dobleces AN y PF [11] y trata de sobreponer cada doblez sobre sí para verificar que se formaría un doblez perpendicular a los primeros [13], estableciendo así un puente entre el dato y la aserción. El respaldo es de naturaleza teórica y se evidencia en el hecho geométrico *paralelos-perpendicular*^v evocado por Ea [11]. No se reconoce refutador dado que no mencionan casos que desvirtúen la conclusión. Por último, el calificador modal es de certidumbre, no se reconoce en la interacción de los estudiantes duda o inseguridad en lo que afirmaron. La suplementación del medio fue total única [U] pues Ea recurrió al doblado de papel de manera exclusiva y no a propiedades físicas de la hoja.

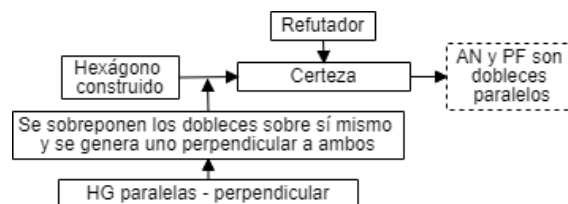


Figura 4. Esquema del argumento: justificación de dobleces paralelos en un hexágono regular

ANÁLISIS DE DATOS

Con base en los datos acopiados en la implementación de las tareas se procedió a realizar un análisis de cada uno de los argumentos identificados. Presentamos el resultado del análisis en atención al objetivo del estudio. En primer lugar, queremos hablar sobre la presencia de argumentos en los datos analizados. Para ello presentamos en la Figura 5 la frecuencia de argumentos, discriminados por tipo y momento de la clase, a lo largo de la implementación de las tareas diseñadas.

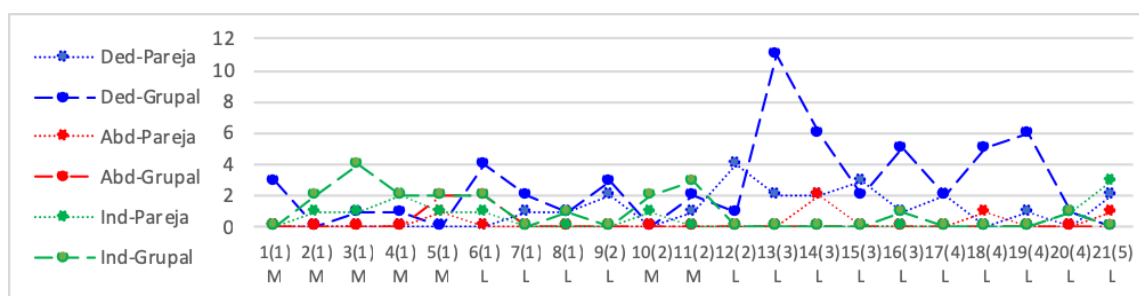


Figura 5. Presencia de argumentos de acuerdo con el tipo y momento de la clase

Se puede asegurar la presencia de argumentos en cada una de las tareas implementadas. Sin embargo, se reconocen comportamientos llamativos, por su alta presencia o por su inexistencia. Los argumentos de tipo deductivo fueron aquellos que tuvieron mayor presencia, tanto en el trabajo de Brock y Max, como en la socialización de resultados. Estos posiblemente fueron incrementándose con el pasar del tiempo, aun cuando no de manera constante, por el crecimiento del sistema teórico que se iba configurando al interior de la clase y porque desde la tarea doce estas fueron exclusivamente de profundización. Lo anterior deja ver que los estudiantes se apropiaron de elementos teóricos para sustentar sus ideas, asunto que apoya las ideas de Santa y Jaramillo (2013), quienes señalan que el trabajo con este medio promueve justificaciones enmarcadas en elementos teóricos propios de este medio. Los argumentos abductivos no gozaron de una presencia notable, asunto que tiene explicación en el tipo de tareas diseñadas. Las situaciones propuestas principalmente atendían al descubrimiento de propiedades y a la justificación de estas, de ahí que se esperara mayor cantidad de argumentos inductivos y deductivos.

La presencia de los argumentos inductivos no fue tan alta en comparación a los deductivos, lo que tiene sentido al considerar que las tareas de descubrimiento apuntaban al establecimiento de un hecho geométrico y las aproximaciones a esta eran similares dada la situación propuesta. En estos casos el profesor tenía en cuenta algunas intervenciones de los estudiantes en la fase grupal y al ver que estas eran repetitivas, no abordaba otras soluciones, pues se reconocía ya el resultado de la tarea. Por su parte, las tareas de profundización brindaban la oportunidad de resolver un problema de diversas formas, lo que daba pie a una mayor cantidad de argumentos deductivos.

En segundo lugar queremos realizar algunos comentarios frente a la naturaleza de los argumentos evidenciados a lo largo de la implementación. Para ello tenemos en cuenta aspectos como la completitud de los elementos del argumento y el papel del medio a través de la suplementación.

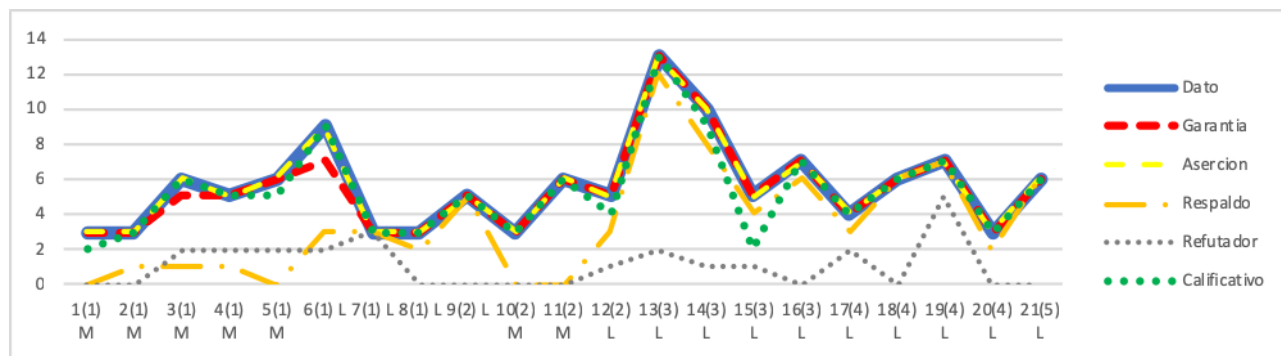


Figura 6. Presencia de los elementos del argumento

Al analizar la completitud de los argumentos tuvimos en cuenta sus seis elementos constitutivos, aun cuando autores como Samper y Toro (2017) mencionan que un argumento es completo cuando en este son explícitos el dato, la garantía y la aserción. Esta elección obedeció a las consideraciones de Inglis y Mejía-Ramos (2005) sobre la importancia de considerar el esquema completo de Toulmin dada la perspectiva no absolutista de las matemáticas, la cual en el contexto de la GDP tiene presencia

por aspectos como las limitaciones y propiedades de la hoja de papel y la motricidad involucrada en las construcciones realizadas. La Figura 6 muestra la presencia de cada elemento a lo largo de la secuencia de tareas. De esta queremos resaltar la convergencia de las líneas poligonales que representan cada elemento al transcurrir las tareas propuestas, lo que deja ver que el discurso de los estudiantes involucraba cada vez más los elementos constitutivos de los argumentos.

En todos los argumentos identificados se reconoció dato y aserción, resultado que guarda relación con las ideas de Chamizo (2007), quien señala que en la observación de los argumentos, bajo la estructura de Toulmin, los datos y aserción por lo general tienen un carácter explícito, mientras que la garantía tiene un carácter implícito. Esta consideración sobre la garantía tiene una ligera cercanía con lo observado en nuestro estudio, pues solo en dos tareas la garantía no es explícita para todos los argumentos pertenecientes a esta. El calificativo es otro elemento que en algunos casos no se hace explícito de la misma forma que el dato y la aserción, aun cuando la diferencia con estos no es marcada. Para analizar este elemento se acudía a expresiones de los estudiantes que permitieran reconocer seguridad o duda en sus intervenciones, se incluía también la entonación de la voz y si hablaba de seguido o realizaba pausas. Por lo anterior, la ausencia de este elemento se dio por intervenciones cortas sobre las que no se podía adoptar alguna postura al respecto.

El respaldo y refutador son los elementos con diferencia más marcada dentro de los argumentos analizados. Pese a ello, el comportamiento del primero deja ver que este se incorporó en mayor medida al discurso de los estudiantes. A partir de la tarea doce, donde la diferencia en las líneas poligonales se reduce notablemente, los estudiantes se involucraron en tareas donde se solicitaba principalmente la justificación de propiedades, se contaba con un sistema teórico más robusto y la manipulación del papel era más elaborada. Por su parte, el refutador exhibió frecuencias nulas o muy cercanas a esta. Esto significa que los estudiantes en su discurso no reconocían salvedades a las declaraciones realizadas, bien porque estas no tenían lugar o porque no eran conscientes de ellas.

Finalmente, realizaremos algunos comentarios sobre el papel del medio (GDP). En cada argumento identificado se caracterizó el nivel de suplementación, con lo que se pretendía dar una apreciación sobre la forma en que el papel se involucraba al resolver la tarea. En la Figura 7 se muestra la presencia de cada nivel de suplementación a lo largo de las tareas propuestas.

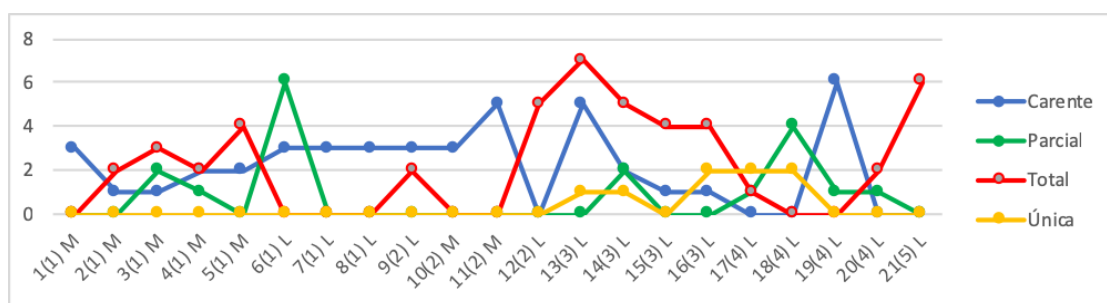


Figura 7. Suplementación del medio

Sobre la suplementación carente puede reconocerse que hasta la tarea 11 esta exhibe una presencia notable, en adelante esta se reduce y manifiesta de manera significativa en apenas dos tareas posteriores. Las tareas donde este nivel de suplementación es elevado apenas involucraban relaciones de colinealidad, en las que el medio no era relevante, pues las representaciones de dobles y puntos podía realizarse con otros medios (lápiz y papel) y aun así se arribaba al mismo resultado. En las otras tareas donde esta presencia es alta (13 y 19) se proponían métodos para construir dobles perpendiculares y para determinar si dos dobles eran paralelos. En ambos casos las discusiones se apoyaron en representaciones elaboradas, por lo que el papel no se manipuló de alguna forma. La suplementación parcial tuvo muy poca presencia y solo en algunos casos esta fue notable. En estas tareas se reconoció una presencia relevante de este nivel de suplementación debido a que en las producciones de los estudiantes se acude a la representación de objetos geométricos en el papel, pero

sobre estos se interviene con ayuda de otros recursos que hacen que el papel, aun cuando involucrado, no se utilice con exclusividad.

La suplementación total es la más representativa. Aun cuando tiene pocos momentos en que esta es nula, en las tareas finales este nivel de suplementación es considerablemente notorio. A lo largo de la secuencia se pudo observar que los estudiantes se apropiaban del uso del papel no solo para realizar construcciones en atención a lo solicitado en la tarea, sino que además buscaban, gracias a los elementos teóricos incorporados, formas de utilizar estos procedimientos para soportar o controvertir sus ideas (v. g. verificar si dos dobles eran paralelos al construir uno perpendicular a uno de estos y ver lo que ocurría entre este y el segundo doblez paralelo), promoviendo así nuevas relaciones geométricas que ampliaban su bagaje conceptual (Santa y Jaramillo, 2013).

En la mayoría de los casos la forma en que se involucró el papel recurrió a aspectos característicos del medio (bordes paralelos y perpendiculares). La suplementación total no se pudo catalogar como única dado que la GDP no contempla el uso de estas particularidades del medio. Todas estas formas de proceder tuvieron lugar por iniciativa propia de los estudiantes, quienes en las hojas rectangulares reconocieron y se valieron de propiedades no explícitas en clase. Finalmente, la suplementación única, aun cuando escasa en su presencia, se logró evidenciar a partir de la tarea trece, donde tuvo un ligero protagonismo en algunas tareas de profundización. Consideramos que haber solicitado a los estudiantes que no se acudiera a las propiedades físicas del papel hubiera llevado a que esta suplementación hubiera tenido mayor presencia.

CONCLUSIONES Y PROYECCIONES

A través del estudio se quería dar cuenta y razón de la presencia y naturaleza de los argumentos que emergen en el trabajo con GDP. Para ello se involucraron estudiantes de educación secundaria a través de una secuencia de tareas en las que este medio era protagonista. Lo presentado en este documento atiende al objetivo declarado, pero se requieren otros estudios, en otros contextos, que permitan ampliar o refutar las ideas acá presentadas. De acuerdo con Boakes (2008), hay muchos asuntos por estudiar sobre el doblado del papel. Lo presentado acá deja ver algunos aspectos sobre los cuales queremos realizar una síntesis.

La secuencia implementada con el apoyo de la GDP promovió la emergencia de argumentos inductivos y deductivos principalmente. Se reconoce así que los estudiantes se van apropiando del sistema teórico de referencia y reconocen en este un respaldo para sus afirmaciones de manera natural. En esta misma vía, los elementos que conforman un argumento (Toulmin et al., 1984) se evidencian desde las primeras tareas en las expresiones de los estudiantes, aunque no con la misma representatividad. Aun así, la continua interacción de los estudiantes con el medio no solo lleva a la conformación de un sistema teórico más robusto o a la experticia en el doblado del papel, lleva también a que ellos elaboren estructuras discursivas en las que los distintos elementos del argumento tienen presencia simultánea.

En este estudio se buscó un recurso alternativo a la geometría dinámica, que fuera de fácil acceso en instituciones educativas donde no se tiene acceso a dispositivos computacionales. Los resultados del estudio reportado permiten situar la GDP como un medio que promueve la argumentación, aunque esto no es algo instantáneo. Se requieren intervenciones de mediano y largo alcance, pues el trabajo con este medio demanda habilidades motrices y el establecimiento de un lenguaje particular. En el estudio realizado los estudiantes se apropiaron de estos elementos y progresivamente los incorporaron en su actividad matemática al construir, validar y refutar ideas. Sin embargo, puede incurrirse en la adopción de garantes para sus afirmaciones que involucren propiedades físicas del papel. Al respecto, podría pensarse en el uso de hojas de papel no rectangulares, observando los esquemas desarrollados sobre el medio, posiblemente unos donde la suplementación sea única.

A la luz de las ideas del constructo Humanos-con-medios (Borba y Villarreal, 2006) se reconoce que los estudiantes, al interactuar con este medio, elaboran un conocimiento que no es inerte ni memorístico. Los estudiantes se apropian de procedimientos con los que afrontan las tareas y reconocen en estos elementos para validar o refutar declaraciones propias o de otros. Por lo anterior, los estudiantes adoptan formas de trabajar con los objetos geométricos en las que el discurso teórico se engrana con la actividad sobre el papel; no se habla sin hacer ni tampoco se hace sin justificar.

En la literatura se reconocen avances en la caracterización de los argumentos y su naturaleza cuando se interactúa con geometría dinámica (v. g. Flores, 2007). Sin embargo, un trabajo del mismo estilo no se reconoce al considerar la GDP. Por lo tanto, consideramos que este es un terreno fértil, en el que muchos aspectos aún deben ser analizados (tipos de tareas, gestión del profesor). Se requieren mayores esfuerzos en esta línea si se desea incorporar este medio de manera decidida.

Referencias

- Boakes, N. (2008). Origami-mathematics lessons: Paper folding as a teaching tool. *Mathitudes*, 1(1), 1-9.
- Borba, M. C. y Villarreal, M. E. (2006). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation*. Nueva York, EE.UU.: Springer.
- Chamizo, J. A. (2007). Las aportaciones de Toulmin a la enseñanza de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(1), 133-146
- Flores, A. H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, 19(1), 63-98.
- Inglis, M. y Mejía-Ramos, J. P. (2005). La fuerza de la aserción y el poder persuasivo en la argumentación en matemáticas. *Revista EMA*, 10(2-3), 328-353.
- Miles, M. B. y Huberman, A. M. (1994). *Qualitative Data Analysis* (2nd ed.). Thousand Oaks, EE.UU.: Sage.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88.
- Samper, C. y Toro, J. A. (2017). Un experimento de enseñanza en grado octavo sobre la argumentación en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 50, 367-382.
- Santa, Z. M. y Jaramillo, C. M. (2013). Producción de conocimiento geométrico a través de la visualización de construcciones con doblado de papel. En Y. Morales y A. Ramírez (Eds.), *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe (I CEMACYC)* (pp. 1153-1162). Santo Domingo, República Dominicana: Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra PUCMM.
- Toulmin, S., Rieke, R. D. y Janik, A. (1984). *An Introduction to Reasoning*. New York, EE.UU.: MacMillan.
- Villa-Ochoa, J. y Borba, M. C. (2011). Humans-with-Media en la producción de conocimiento matemático. El caso de GeoGebra. En G. García (Ed.), *Memorias del 12° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 667-673). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Gaia.
- Villarreal, M. (2013). Humanos-con-medios: un marco para comprender la producción matemática y repensar prácticas educativas. En E. M. Miranda y N. A. Paciulli (Coords.), *Formación de Profesores, Currículum, Sujetos y Prácticas Educativas: Las perspectivas de la investigación en Argentina y Brasil* (pp. 85-122). Córdoba, Argentina: Editorial de la Universidad de Córdoba.

ⁱ De acuerdo con la presencia [1] o no [0] de cada elemento se asignaban estos valores.

ⁱⁱ Dos ángulos son congruentes si al superponerse coinciden sus lados.

ⁱⁱⁱ Dos dobleces son perpendiculares si al cruzarse forman ángulo recto.

^{iv} Los dobleces paralelos son aquellos dobleces que no se cruzan aun cuando se prolonguen indefinidamente.

^v Si tengo 2 dobleces paralelos, al superponerlos sobre sí mismos se genera un doblez perpendicular.